Séminaire BOURBAKI Mars 2006
58ème année, 2005-2006, n$^{\mathrm{o}}$ 957

LE THÉORÈME FORT DES GRAPHES PARFAITS

par **Gérard CORNUÉJOLS**

INTRODUCTION

Au début des années 1960, Claude Berge [1] a proposé deux conjectures sur les graphes parfaits. La première a été démontrée en 1972 par Laci Lovász [21]. La deuxième a fait couler beaucoup d'encre dans les 30 années qui ont suivi. Elle a été démontrée en 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas dans un article très impressionnant de 150 pages qui devrait sortir bientôt dans les *Annals of Mathematics* [9]. Cet exposé présente cette conjecture célèbre et donne une idée de sa démonstration.

1. GRAPHES PARFAITS

Un *graphe* G consiste en un ensemble fini $V(G)$ de *sommets* et un ensemble $A(G)$ de paires nonordonnées uv où $u, v \in V(G)$ et $u \neq v$, appelées *arêtes* (Pour le lecteur habitué à une définition plus générale de la notion de graphe, nous considérons ici des graphes finis sans boucles ni arêtes multiples). Si uv est une arête, on dit que les sommets u et v sont *adjacents*, qu'ils sont les *extrémités* de l'arête uv et que l'arête uv est *incidente* à u et à v.

Dans un graphe G, un *stable* est un ensemble de sommets nonadjacents deux à deux. Une *clique* est un ensemble de sommets adjacents deux à deux. On dénote par $\omega(G)$ la cardinalité d'une plus grande clique dans G, et par $\alpha(G)$ la cardinalité d'un plus grand stable. Une *k-coloration* de G est une partition des sommets de G en k stables (on appelle ces stables les *classes de couleur* de la k-coloration). Autrement dit, un graphe a une k-coloriation s'il est possible de colorier ses sommets avec k couleurs distinctes de façon que deux sommets adjacents ne soient pas de la même couleur. Le *nombre chromatique* $\chi(G)$ est la plus petite valeur de k pour laquelle il existe une k-coloration. Il est clair que $\omega(G) \leq \chi(G)$ puisque chaque sommet d'une clique doit être dans une classe de couleur différente. Un graphe H est un *sous-graphe induit* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $A(H)$ est l'ensemble des arêtes de G dont les deux extrémités sont dans $V(H)$. Pour $S \subseteq V(G)$, on dénote par $G(S)$ le sous-graphe induit de G dont S est l'ensemble des sommets. On denote le graphe $G(V(G) - S)$ par $G \backslash S$.

Définition 1.1. — *Un graphe G est* parfait *si $\omega(H) = \chi(H)$ pour tout sous-graphe induit H de G.*

2. LES CONJECTURES DE CLAUDE BERGE

Un graphe est *minimalement imparfait* s'il n'est pas parfait, mais tous ses sous-graphes induits propres le sont. Evidemment, un graphe est parfait si et seulement s'il ne contient pas de graphe minimalement imparfait comme sous-graphe induit. Quels sont les graphes minimalement imparfaits connus? Un *trou* est un graphe avec $k \geq 4$ sommets distincts $v_1, \ldots, v_k$ et k arêtes $v_1v_2, v_2v_3, \ldots, v_kv_1$. Un trou est *impair* si k est impair. Les trous impairs ne sont pas parfaits puisque leur nombre chromatique est égal à 3 et la plus grande clique a cardinalité 2. Il est facile de vérifier que les trous impairs sont minimalement imparfaits. Le *complément* d'un graphe G est le graphe $\overline{G}$ qui a le même ensemble de sommets et où uv est une arête de $\overline{G}$ si et seulement si uv n'est pas une arête de G. Il n'est pas très difficile de vérifier que les compléments des trous impairs sont aussi minimalement imparfaits.

Au début des années 1960, Claude Berge [1] a formulé la *Conjecture Forte des Graphes Parfaits*: les seuls graphes minimalement imparfaits sont les trous impairs et leur compléments. Cette conjecture a suscité un très grand intérêt pendant quarante ans, jusqu'à sa résolution en mai 2002 par Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas dans un article très impressionant de 150 pages [9]. Claude Berge s'est éteint en juin 2002 sachant que sa conjecture célèbre est correcte.

Théorème 2.1. — **(Théorème Fort des Graphes Parfaits)** (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9]) *Les seuls graphes minimalement imparfaits sont les trous impairs et leur compléments.*

Nous allons présenter les idées principales de la démonstration de ce théoreme. Il sera commode d'appeler *graphe de Berge* un graphe qui ne contient ni trou impair ni son complément comme sous-graphe induit. Tout graphe parfait est bien évidemment un graphe de Berge. Le Théorème Fort des Graphes Parfaits affirme que la réciproque est vraie: tout graphe de Berge est parfait.

Pour augmenter l'intérêt pour cette conjecture difficile, Claude Berge [1] avait formulé une deuxième conjecture, très jolie mais plus faible, disant qu'un graphe G est parfait si et seulement si son complément $\overline{G}$ est parfait. Ray Fulkerson [18] s'est cassé les dents sur cette conjecture (mais a développé pour l'attaquer la belle théorie des polyèdres antibloquants) et c'est Laci Lovász [21] qui l'a démontrée en 1972. Nous en donnons une démonstration courte et élégante proposée par Grigor Gasparyan [19] en 1996.

Théorème 2.2. — **(Théorème des Graphes Parfaits)** (Lovász [21]) *Un graphe G est parfait si et seulement si son complément $\overline{G}$ est parfait.*

Démonstration. — Nous allons démontrer le résultat suivant, dû à Lovász [22], et qui est plus fort.

Assertion: Un graphe G est parfait si et seulement si, pour tout sous-graphe induit H, le nombre des sommets de H est au plus égal à $\alpha(H)\omega(H)$.

Cette assertion implique le Théorème 2.2 puisque $\alpha(H) = \omega(\overline{H})$ et $\omega(H) = \alpha(\overline{H})$.

Démonstration de l'assertion – Si le graphe G est parfait, on a $\omega(H) = \chi(H)$ pour tout sous-graphe induit H et l'inégalité de l'assertion découle directement du fait que le nombre des sommets de H est au plus égal à $\alpha(H)\chi(H)$.

Il suffit donc de démontrer la réciproque. Nous présentons la démonstration de Gasparyan [19]. Supposons que le graphe G ne soit pas parfait. Soit H un sous-graphe induit minimalement imparfait. Nous dénoterons par n le nombre des sommets de H, $\alpha := \alpha(H)$ et $\omega := \omega(H)$. Le graphe H satisfait les relations suivantes:

$$\omega = \chi(H\backslash v) \text{ pour tout } v \in V(H), \text{ et}$$

$$\omega = \omega(H\backslash S) \text{ pour tout stable } S \subseteq V(H).$$

Soit A_0 un α-stable de H (le terme α-stable est un racourci pour dire un stable de cardinalité α). On fixe une ω-coloration dans chacun des α graphes $H\backslash s$ où $s \in A_0$. Soient $A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}$ les stables qui apparaissent comme classe de couleur dans l'un de ces coloriages. Soit $\mathcal{A} := \{A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha\omega}\}$. On définit la matrice d'incidence $\mathbf{A}$ entre ces stables et les sommets de H. Donc $a_{ij} = 1$ dans la matrice $\mathbf{A}$ si et seulement si $v_j \in A_i$. Soit $\mathcal{B} := \{B_0, B_1, \ldots, B_{\alpha\omega}\}$ où B_i est une ω-clique de $H\backslash A_i$. Soit $\mathbf{B}$ la matrice d'incidence correspondante cliques-sommets.

Nous allons démontrer que $\mathbf{AB}^T = J - I$, où J est la matrice remplie de uns et I est la matrice identité.

Considérons une ω-coloration $S_1, \ldots, S_\omega$ de $H\backslash s$. Une ω-clique B_i intersecte tous les S_j si $s \notin B_i$ (puisque $|B_i \cap S_j \leq 1|$ pour tout j et $|B_i| = \omega$), et tous les S_j sauf un si $s \in B_i$. Comme chaque B_i a au plus un sommet dans A_0, il en découle que $\mathbf{AB}^T = J - I$.

On fait maintenant appel à un argument d'algèbre linéaire. Puisque la matrice $J - I$ a rang plein, on en déduit que les matrices $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ ont chacune au moins autant de colonnes que de lignes, c'est-à-dire $n \geq \alpha\omega + 1$. □

Ayant démontré la Conjecture Faible des Graphes Parfaits (Théorème 2.2), nous allons maintenant nous attaquer à la Conjecture Forte (Théorème 2.1). Rappelez-vous qu'il suffit de démontrer que tout graphe de Berge est parfait. L'idée de la démonstration est que tout graphe de Berge ou bien fait partie d'une classe de graphes parfaits parmi quatre classes élémentaires connues, ou bien a un type de séparation qui ne peut pas se produire dans un graphe minimalement imparfait. Un tel résultat structurel démontre la Conjecture Forte puisqu'il implique qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. Une petite remarque: on peut se contenter de séparations qui ne peuvent pas se produire dans un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets: cela implique aussi qu'un graphe de Berge minimalement imparfait n'existe pas. C'est un tel résultat structurel qu'ont démontré Maria Chudnovsky, Neil Robertson, Paul Seymour et Robin Thomas [9].

3. QUATRE CLASSES ELÉMENTAIRES DE GRAPHES PARFAITS

Un graphe G est *biparti* si ses sommets peuvent se partitionner en deux ensembles V_1, V_2 de façon que toutes les arêtes de G aient une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2. Les graphes bipartis sont parfaits puisque la bipartition induit deux classes de couleur et par conséquent $\omega(H) = \chi(H)$ dans tout sous-graphe induit H.

Un graphe L est le *graphe lignes* du graphe G si $V(L) = A(G)$ et deux sommets de L sont adjacents si et seulement si les arêtes correspondantes de G ont un sommet en commun.

PROPOSITION 3.1. — *Le graphe lignes d'un graphe biparti est parfait.*

Démonstration. — L'*indexe chromatique* $\chi'(G)$ d'un graphe G est le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier ses *arêtes* avec k couleurs distinctes de façon que deux arêtes ayant un sommet en commun ne soient pas de la même couleur. König [20] a démontré que l'indexe chromatique d'un graphe biparti est égal au degré maximum $\Delta(G)$ (le *degré* d'un sommet u est le nombre d'arêtes incidentes à u).

Si L est le graphe lignes d'un graphe biparti G, on a $\chi(L) = \chi'(G)$ et $\omega(L) = \Delta(G)$. Le théorème de König implique donc que $\chi(L) = \omega(L)$. La proposition découle maintenant du fait que les sous-graphes induits de L sont aussi des graphes lignes de graphes bipartis. □

Puisque les graphes bipartis et les graphes lignes de graphes bipartis sont parfaits, il découle du Théorème des Graphes Parfaits de Lovász (Théorème 2.2) que les compléments des graphes bipartis et des graphes lignes de graphes bipartis sont parfaits. On peut aussi le vérifier directement, sans faire appel au Théorème des Graphes Parfaits. Pour résumer, nous avons introduit dans cette section quatre classes de graphes parfaits:

– les graphes bipartis et leurs compléments, et
– les graphes lignes de graphes bipartis et leurs compléments.

Nous appellerons ces classes de graphes les *classes élémentaires de graphes parfaits*.

4. 2-JOINT, PAIRE HOMOGÈNE ET PARTITION ANTISYMÉTRIQUE

Dans cette section, nous introduisons trois types de séparations qui ne peuvent pas se produire dans un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets.

4.1. 2-Joint

Un graphe G a un *2-joint* si ses sommets peuvent se partitionner en deux ensembles V_1, V_2, chacun de cardinalité au moins trois, contenant des sous-ensembles non vides disjoints $A_1, B_1 \subseteq V_1$ et $A_2, B_2 \subseteq V_2$, tels que tous les sommets de A_1 sont adjacents à tous les sommets de A_2, tous les sommets de B_1 sont adjacents à tous les sommets de B_2 et ces adjacences sont les seules entre V_1 et V_2. Les 2-joints ont été introduits en 1985 par Cornuéjols et Cunningham [16].

Lorsqu'un graphe G a un 2-joint, on peut décomposer G en deux blocs G_1 et G_2.

Pour définir ces blocs, nous avons besoin d'introduire les notions de chemin et de composante connexe. Un *chemin* dans un graphe G est une suite de sommets distincts $u_1, \ldots, u_k$ tels que $u_i u_{i+1} \in A(G)$ pour $i = 1, \ldots, k-1$. La *longueur* du chemin est égale à $k-1$. Les sommets u_1 et u_k sont les *extrémités* du chemin et les autres sommets sont *intérieurs*. Un chemin est *induit* s'il n'existe pas d'arête $u_i u_j$ pour $i \geq 1$ et $i+1 < j \leq k$. Une *composante connexe* de G est un sous-graphe induit par un ensemble maximal de sommets tels qu'il existe un chemin entre chaque paire d'entre eux.

Nous pouvons maintenant définir les blocs G_1 et G_2. Si A_2 et B_2 sont dans des composantes connexes différentes de $G(V_2)$, définir le *bloc* G_1 comme étant $G(V_1 \cup \{p_1, q_1\})$, où $p_1 \in A_2$ et $q_1 \in B_2$. Sinon, soit P_1 un plus court chemin avec une extrémité dans A_2 et l'autre dans B_2, et définir le *bloc* G_1 comme étant $G(V_1 \cup P_1)$. Le bloc G_2 est défini de façon similaire.

Théorème 4.1. — **(Théorème de Décomposition par 2-Joint)** (Cornuéjols et Cunningham [16]) *Soit G un graphe qui a un 2-joint. Le graphe G est parfait si et seulement si ses blocs G_1 et G_2 sont parfaits.*

Corollaire 4.2. — *Si un graphe G minimalement imparfait a un 2-joint, alors G est un trou impair.*

Démonstration. — Puisque G n'est pas parfait, Théorème 4.1 implique que le bloc G_1 ou G_2 n'est pas parfait, disons G_1. Puisque G_1 est un sous-graphe induit de G et que G est minimalement imparfait, il découle que $G = G_1$. Puisque $|V_2| \geq 3$, ces sommets forment un chemin induit de G et par conséquent G est un graphe minimalement imparfait avec un sommet de degré deux. Un tel graphe est un trou impair [24]. □

4.2. Paire Homogène

La notion de paire homogène a été introduite en 1987 par Chvátal et Sbihi [5]. Un graphe G a une *paire homogène* si $V(G)$ peut être partitionné en sous-ensembles A_1, A_2 et B tels que:

- $|A_1| + |A_2| \geq 3$ et $|B| \geq 2$.
- Si un sommet de B est adjacent à un sommet de A_i alors il est adjacent à tous les sommets de A_i, pour $i \in \{1, 2\}$.

THÉORÈME 4.3. — **(Théorème de la Paire Homogène)** (Chvátal et Sbihi [5]) *Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de paire homogène.*

4.3. Partition Antisymétrique

Un graphe G a une *partition antisymétrique* si ses sommets peuvent se partitionner en quatre ensembles non vides A, B, C, D tels que $V(G)$ contienne toutes les arêtes possibles entre A et B et aucune arête entre C et D. Chvátal [3] a introduit cette notion en 1985 et il a conjecturé qu'aucun graphe minimalement imparfait ne peut avoir de partition antisymétrique. Il a remarqué que la conjecture est vraie dans le cas où $|A| = 1$, qu'il appelle *étoile d'articulation.*

LEMME 4.4. — **(Lemme de l'Etoile d'Articulation)** (Chvátal [3]) *Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir d'étoile d'articulation.*

Démonstration. — Supposons qu'un graphe G minimalement imparfait ait une étoile d'articulation A, B, C, D. Soient G_1 le graphe induit par $A \cup B \cup C$ et G_2 le graphe induit par $A \cup B \cup D$. Les graphes G_1 et G_2 sont parfaits. Dans une $\omega(G)$-coloration de G_i, soit S_i la classe de couleur qui contient le sommet unique de A, pour $i \in \{1, 2\}$. Le stable S_i intersecte toutes les $\omega(G)$-cliques de G_i, i.e. $\omega(G \setminus (S_1 \cup S_2)) < \omega(G)$. Il en découle que le graphe $G \setminus (S_1 \cup S_2)$ peut être colorié avec moins d'$\omega(G)$ couleurs, puisque c'est un graphe parfait. Comme $S_1 \cup S_2$ est un stable, G peut être colorié avec $\omega(G)$ couleurs, une contradiction. $\square$

C'est Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9] qui sont venu à bout de la conjecture de Chvátal sur les partitions antisymétriques.

THÉORÈME 4.5. — **(Théorème de la Partition Antisymétrique)** (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9]) *Un graphe minimalement imparfait ne peut pas avoir de partition antisymétrique.*

Malheureusement, pour démontrer ce résultat, ils utilisent le Théorème Fort des Graphes Parfaits! C'est bien dommage car on aurait besoin d'un résultat de ce genre pour démontrer le Théorème Fort des Graphes Parfaits. Que faire? Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas commencent par démontrer un résultat intermédiaire plus faible que le Théorème 4.5.

Une partition antisymétrique est *équilibrée* si

(i) tout chemin induit de longueur au moins 2 dans G avec ses extrémités dans $A \cup B$ et ses sommets intérieurs dans $C \cup D$ est pair, et

(ii) tout chemin induit de longueur au moins 2 dans $\overline{G}$ avec ses extrémités dans $C \cup D$ et ses sommets intérieurs dans $A \cup B$ est pair.

Théorème 4.6. — (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [8]) *Un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets ne peut pas avoir de partition antisymétrique équilibrée.*

Nous allons démontrer le Théorème 4.6. Nous aurons besoin du Lemme de Duplication de Lovász [21]. Pour l'anecdote, ce lemme était la seule pièce qui manquait à Fulkerson pour démontrer le Théorème des Graphes Parfaits. Fulkerson s'était convaincu que ce lemme était sans doute faux, et il n'avait donc pas essayé très sérieusement de le démontrer. Fulkerson [18] dit: "In the Spring of 1971, I received a postcard from Berge saying that he had just heard that Lovász had a proof of the perfect graph conjecture. This immediately rekindled my interest, naturally, and so I sat down at my desk and thought again about the replication lemma. Some four or five hours later, I saw a simple proof of it."

Lemme 4.7. — **(Lemme de Duplication)** (Lovász [21]) *Soient G un graphe parfait et $v \in V(G)$. Créer un nouveau sommet v' et le joindre à v et à tous les voisins de v. Le graphe G' qui en résulte est parfait.*

Démonstration. — Il suffit de démontrer que $\chi(G') = \omega(G')$ puisque, pour les sous-graphes induits, la démonstration est identique. Nous distinguons deux cas.

Cas 1 : Le sommet v est contenu dans une clique maximum de G. Alors $\omega(G') = \omega(G) + 1$. Ceci implique que $\chi(G') = \omega(G')$, puisqu'une nouvelle couleur est nécessaire dans G'.

Cas 2 : Le sommet v n'est contenu dans aucune clique maximum de G. Dans une $\omega(G)$-coloration de G, considérons la classe S de couleur contenant v. On a $\omega(G \setminus (S - \{v\})) = \omega(G) - 1$, puisque toutes les cliques maximums de G intersectent $S - \{v\}$. La perfection du graphe G implique que le graphe $G \setminus (S - \{v\})$ peut être colorié avec $\omega(G) - 1$ couleurs. En utilisant une couleur supplémentaire pour les sommets de $(S - \{v\}) \cup \{v'\}$, on obtient une $\omega(G)$-coloration de G'.

□

Démonstration du Théorème 4.6: — Soit G un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets. Supposons que G ait une partition antisymétrique équilibrée A, B, C, D. Le Lemme de l'Etoile d'Articulation 4.4 implique que chacun des ensembles A, B, C, D a cardinalité au moins deux. Soit G' le graphe obtenu à partir de G en ajoutant un sommet v adjacent à tous les sommets de A et à aucun autre sommet de G. Si G' contient un trou impair, alors G a un chemin impair qui contredit (i) dans la definition d'une partition antisymétrique équilibrée. De la même façon, si $\overline{G'}$ contient un trou impair, cela contredit (ii). Donc G' est un graphe de

Berge. Considérons maintenant $G_1 = G' \setminus D$ et $G_2 = G' \setminus C$. Pour $i \in \{1, 2\}$, le graphe G_i est parfait puisque c'est un graphe de Berge avec moins de sommets que G. On duplique le sommet v dans G_i jusqu'à ce que v appartienne à une clique de cardinalité $\omega(G)$. Le Lemme de Duplication 4.7 implique que le graphe R_i qui en résulte est parfait. Donc R_1 admet une $\omega(G)$-coloration et de même R_2 admet une $\omega(G)$-coloration. Ces deux colorations ont le même nombre de couleurs dans A. On suppose sans perte de généralité que ces couleurs sont numérotées $1, 2, \ldots, k$. Soit K le sous-graphe de G induit par les sommets de couleurs $1, 2, \ldots, k$ et soit H le sous-graphe de G induit par les sommets coloriés avec les autres couleurs. Puisque toutes les cliques de G sont dans $G \setminus D$ ou $G \setminus C$, la plus grande clique dans K a cardinalité k et la plus grande clique dans H a cardinalité $\omega(G) - k$. Les graphes H et K sont parfaits puisque ce sont des sous-graphes propres de G. Colorier K avec k couleurs et H avec $\omega(G) - k$ couleurs. On a ainsi colorié le graphe G avec $\omega(G)$ couleurs, ce qui contredit l'hypothèse que G est minimalement imparfait. □

Le Théorème 4.6 a été annoncé pour la première fois par Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas en septembre 2001 à un atelier à Princeton [8]. Ce résultat clé justifie l'usage des partitions antisymétriques équilibrées dans un théorème structurel sur les graphes de Berge, dans le but de démontrer la Conjecture Forte des Graphes Parfaits. Et c'est bien cette structure que Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9] utilisent à fond dans leur article. Ils sont cependant parvenus à se débarrasser de la condition d'équilibrage en janvier 2002 (Chudnovsky et Seymour [10]):

Théorème 4.8. — (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9]) *Un graphe de Berge minimalement imparfait avec le plus petit nombre de sommets ne peut pas avoir de partition antisymétrique.*

5. DÉCOMPOSITION DES GRAPHES DE BERGE

Conforti, Cornuéjols et Vušković avaient proposé l'approche suivante pour résoudre la Conjecture Forte des Graphes Parfaits.

Conjecture 5.1. — (Conforti, Cornuéjols et Vušković (février 2001)) **(Conjecture de Décomposition)** *Tout graphe de Berge G est un graphe parfait élémentaire ou a une partition antisymétrique, ou G ou $\overline{G}$ a un 2-joint.*

Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas ont démontré la variation suivante de cette conjecture en juin 2002.

Théorème 5.2. — (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9]) **(Théorème de Décomposition)** *Tout graphe de Berge G est un graphe parfait élémentaire ou a une partition antisymétrique, ou a une paire homogène, ou G ou $\overline{G}$ a un 2-joint.*

Ce théorème implique le Théorème Fort des Graphes Parfaits. En effet, supposons que le Théorème de Décomposition soit vrai et qu'il existe un graphe G minimalement imparfait distinct d'un trou impair ou de son complément. Choisissons G avec le plus petit nombre de sommets. G ne peut pas avoir de partition antisymétrique par le Théorème 4.8. G ne peut pas avoir de paire homogène par le Théorème 4.3. Ni G ni $\overline{G}$ ne peuvent avoir de 2-joint par le Corollaire 4.2. Puisque G est un graphe de Berge, le Théorème de Décomposition implique que G est un graphe parfait élémentaire, ce qui contredit l'hypothèse que G est minimalement imparfait.

Le Théorème 5.2 était déjà connu dans plusieurs cas particuliers, par exemple lorsque G est un graphe de Meyniel (Burlet et Fonlupt [2] en 1984), lorsque G est sans griffe (Chvátal et Sbihi [6] en 1988 et Maffray et Reed [23] en 1999), sans diamant (Fonlupt et Zemirline [17] en 1987), sans taureau (Chvátal et Sbihi [5] en 1987), ou sans fléchette (Chvátal, Fonlupt, Sun et Zemirline [4] in 2000). Ces résultats font intervenir des partitions antisymétriques très particulières (telles que les étoiles d'articulation) et, plus exceptionnellement, des paires homogènes [5] ou des 2-joints très particuliers [23]. In 1999, Conforti et Cornuéjols [12] utilisent des 2-joints plus généraux pour démontrer la Conjecture 5.1 pour une classe de graphes de Berge qui contient tous les graphes bipartis et tous les graphes lignes de graphes bipartis. [12] est le précurseur d'une série de résultats faisant intervenir les 2-joints, tels que celui-ci, obtenu en février 2001:

Théorème 5.3. — (Conforti, Cornuéjols et Vušković [13]) *Tout graphe de Berge sans carré est biparti ou le graphe lignes d'un graphe biparti, ou a un 2-joint ou une étoile d'articulation.*

La démonstration du Théorème 5.2 s'est faite en trois étapes, l'une plus impressionnante que l'autre, chacune nécessitant une cinquantaines de pages très denses. Le premier résultat a été annoncé en septembre 2001.

Théorème 5.4. — (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [8]) *Si G est un graphe de Berge qui contient le graphe lignes d'une sous-division bipartite d'un graphe 3-connexe, alors G a une partition antisymétrique équilibrée, ou G ou $\overline{G}$ a un 2-joint ou est le graphe lignes d'un graphe biparti.*

Etant donnés deux triangles disjoints a_1, a_2, a_3 et b_1, b_2, b_3, un *prisme subdivisé* est un graphe induit par trois chemins disjoints, $P^1 = a_1, \ldots, b_1$, $P^2 = a_2, \ldots, b_2$ et $P^3 = a_3, \ldots, b_3$, dont l'un au moins a une longueur plus grande que un, et tels que les seules adjacences entre sommets de chemins distincts P^1, P^2, P^3 sont les arêtes des deux triangles. Le deuxième résultat, obtenu en janvier 2002 (Chudnovsky et Seymour [10]), est un réel tour de force et une étape clé dans la démonstration du Théorème Fort des Graphes Parfaits. Ce résultat est utilisé en particulier pour démontrer le Théorème 4.8.

Théorème 5.5. — (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9]) *Si G est un graphe de Berge qui contient un prisme subdivisé, alors G est le graphe lignes d'un* *graphe biparti, ou G a une partition antisymétrique équilibrée ou une paire homogène, ou G ou $\overline{G}$ a un 2-joint.*

La dernière étape est le théorème difficile suivant, démontré en mai 2002 (Chudnovsky et Seymour [11]).

THÉORÈME 5.6. — (Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [9]) *Si G est un graphe de Berge qui ne contient ni prisme subdivisé ni son complément, alors G est un graphe parfait élémentaire, ou a une partition antisymétrique, ou G ou $\overline{G}$ a un 2-joint.*

Les Théorèmes 5.5 et 5.6 impliquent le Théorème de Décomposition 5.2, et par conséquent le Théorème Fort des Graphes Parfaits.

En mars 2001, Conforti, Cornuéjols et Vušković [14] avaient démontré une version plus faible de la Conjecture de Décomposition où “partition antisymétrique” est replacée par “étoile double d'articulation”. Une *étoile double* est un ensemble S de sommets dont deux sont adjacents, disons u et v, et tous les autres sommets de S sont adjacents à u ou v. $S \subseteq V(G)$ est un ensemble *d'articulation* si $G \setminus S$ a au moins deux composantes connexes. Il est clair que si G a une partition antisymétrique, alors G a une étoile double d'articulation: choisir $S = A \cup B$, $u \in A$ et $v \in B$. Bien que le résultat de décomposition [14] soit plus faible que la Conjecture 5.1 pour les graphes de Berge, il s'applique à une classe de graphes plus grande: tous les graphes sans trou impair.

THÉORÈME 5.7. — (Conforti, Cornuéjols et Vušković [14]) *Si G est un graphe sans trou impair, alors G est un graphe biparti ou le graphe lignes d'un graphe biparti ou le complément du graphe lignes d'un graphe biparti, ou G a une étoile double d'articulation ou un 2-joint.*

6. LE LEMME MERVEILLEUX

Un résultat de Roussel et Rubio [25] s'avère être un outil très utile dans l'étude des graphes de Berge. Chudnovsky, Robertson, Seymour et Thomas [8] l'ont popularisé sous le nom de *Lemme Merveilleux*. Il est utilisé de façon répétée dans les démonstrations des Théorèmes 5.4-5.6.

LEMME 6.1. — **(Le Lemme Merveilleux)** (Roussel et Rubio [25]) *Soit G un graphe de Berge dont $V(G)$ peut être partitionné en un ensemble S et un chemin induit $P = u, u', \ldots, v', v$ de longueur impaire au moins 3 tel que u, v sont tous les deux adjacents à tous les sommets de S et $\overline{G}(S)$ est connexe. Alors on a l'une des alternatives suivantes:*

(i) *Un nombre impair d'arêtes de P ont leurs deux extrémités adjacentes à tous les sommets de S.*

(ii) *P a longueur 3 et $\overline{G}(S \cup \{u', v'\})$ contient un chemin induit impair entre u' et v'.*

(iii) *P a longueur au moins 5 et il existe deux sommets nonadjacents x, x' dans S tels que $(P \setminus \{u, v\}) \cup \{x, x'\}$ induise un chemin.*

7. RECONNAISSANCE DES GRAPHES PARFAITS

L'autre grande question sur les graphes parfaits qui est restée ouverte pendant des décennies était leur reconnaissance en temps polynomial. Cette question a été résolue récemment par Maria Chudnovsky, Gérard Cornuéjols, Xinming Liu, Paul Seymour et Kristina Vušković [7].

RÉFÉRENCES

[1] C. BERGE – Färbung von Graphen deren sämtliche bzw. deren ungerade Kreise starr sind (Zusammenfassung), *Wissenschaftliche Zeitschrift, Martin Luther Universität Halle-Wittenberg, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Reihe 10* (1961) 114-115.

[2] M. BURLET et J. FONLUPT – Polynomial algorithm to recognize a Meyniel graph, *Annals of Discrete Mathematics 21* (1984) 225-252.

[3] V. CHVÁTAL – Star-cutsets and perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory B 39* (1985) 189-199.

[4] V.CHVÁTAL, J. FONLUPT, L. SUN et A. ZEMIRLINE – Recognizing dart-free perfect graphs, *SIAM Journal on Computing 31* (2002) 1315-1338.

[5] V. CHVÁTAL et N. SBIHI – Bull-free Berge graphs are perfect, *Graphs and Combinatorics 3* (1987) 127-139.

[6] V. CHVÁTAL et N. SBIHI – Recognizing claw-free Berge graphs, *Journal of Combinatorial Theory B 44* (1988) 154-176.

[7] M. CHUDNOVSKY, G. CORNUÉJOLS, X. LIU, P. SEYMOUR et K.VUŠKOVIĆ – Recognizing Berge graphs, *Combinatorica 25* (2005) 143-186.

[8] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. SEYMOUR et R. THOMAS – exposé oral, Workshop on Graph Colouring and Decomposition, Princeton, septembre 2001.

[9] M. CHUDNOVSKY, N. ROBERTSON, P. SEYMOUR et R. THOMAS – The strong perfect graph theorem, (Rapport de Recherche, juin 2002, révisé juillet 2005), à paraître dans *Annals of Mathematics.*

[10] M. CHUDNOVSKY et P. SEYMOUR – communication personnelle (janvier 2002).

[11] M. CHUDNOVSKY et P. SEYMOUR – communication personnelle (mai 2002).

[12] M. CONFORTI et G. CORNUÉJOLS – Graphs without odd holes, parachutes or proper wheels: a generalization of Meyniel graphs and of line graphs of bipartite graphs (Rapport de Recherche, 1999), *Journal of Combinatorial Theory B 87* (2003) 300-330.

[13] M. CONFORTI, G. CORNUÉJOLS et K. VUŠKOVIĆ – Square-free perfect graphs (Rapport de Recherche, février 2001), *Journal of Combinatorial Theory B 90* (2004) 257-307.

[14] M. CONFORTI, G. CORNUÉJOLS et K. VUŠKOVIĆ – Decomposition of odd-hole-free graphs by double star cutsets and 2-joins (Rapport de Recherche, march 2001), *Discrete Applied Mathematics 141* (2004) 41-91.

[15] M. CONFORTI, G. CORNUÉJOLS et G. ZAMBELLI – Decomposing Berge graphs containing no proper wheel, subdivided prism or their complements, (Rapport de Recherche, mai 2002) à paraître dans *Combinatorica*.

[16] G. CORNUÉJOLS et W.H. CUNNINGHAM – Composition for perfect graphs, *Discrete Mathematics 55* (1985) 245-254.

[17] J. FONLUPT et A. ZEMIRLINE – A polynomial recognition algorithm for perfect K_4-$\{e\}$-free graphs, rapport technique RT-16, Artemis, IMAG, Grenoble, France (1987).

[18] D.R. FULKERSON – On the perfect graph theorem, *Mathematical Programming*, T. C. Hu and S. M. Robinson eds., Academic Press (1973) 69-76.

[19] G.S. GASPARYAN – Minimal imperfect graphs: A simple approach, *Combinatorica 16* (1996) 209-212.

[20] D. KÖNIG – Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, *Mathematische Annalen 77* (1916) 453-465.

[21] L. LOVÁSZ – Normal hypergraphs and the perfect graph conjecture, *Discrete Mathematics 2* (1972) 253-267.

[22] L. LOVÁSZ – A Characterization of perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory B 13* (1972) 95-98.

[23] F. MAFFRAY et B. REED – A description of claw-free perfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory B 75* (1999) 134-156.

[24] M. PADBERG – Perfect zero-one matrices, *Mathematical Programming 6* (1974) 180-196.

[25] F. ROUSSEL et P. RUBIO – About skew partitions in minimal imperfect graphs, *Journal of Combinatorial Theory B 83* (2001) 171-190.

Gérard CORNUÉJOLS

Laboratoire d'Informatique Fondamentale
Faculté des Sciences de Luminy
13288 MARSEILLE, France, et
Tepper School of Business and
Department of Mathematical Sciences
Carnegie Mellon University
PITTSBURGH, PA 15213 – U.S.A.
E-mail : `gc0v@andrew.cmu.edu`